Lösningsförslag: TENTA 2022/01/07 TATA43

(1) Stationära punkter: $f'_x = 3x^2 - 10x - 2y + 3 = 0$, $f'_y = -2x + 2y + 6 = 0$. den andra ekvationen ger $y = x - 3$, som insatt i den första ger $3x^2 - 12x + 9 = 0$, d.v.s. $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Alltså är $(1,-2)$ och $(3,0)$ funktionens stationära punkter. Vi får även

$$f''_{xx} = 6x - 10, \quad f''_{xy} = -2, \quad f''_{yy} = 2.$$

- I punkten $(1,-2)$ får vi $f''_{xx} = -4$, $f''_{xy} = -2$, $f''_{yy} = 2$, därmed den kvadratiska formen

$$Q(h,k) = -4h^2 - 4hk + 2k^2 = 2((k-h)^2 - 3h^2)$$

så Q är indefinit: t.ex. $Q(0,1) = 2 > 0$, $Q(1,1) = -6 < 0$. Punkten $(1,-2)$ är alltså en sadelpunkt och därmed ingen lokal extrempunkt.

- I punkten $(3,0)$ får vi $f''_{xx} = 8$, $f''_{xy} = -2$, $f''_{yy} = 2$, alltså

$$Q(h,k) = 8h^2 - 4hk + 2k^2 = 2((k-h)^2 + 3h^2)$$

så $Q(h,k) \geq 0$ för alla (h,k) och $Q(h,k) = 0$ endast då $k - h = h = 0$ $\Rightarrow$ endast då $(h,k) = (0,0)$. Q är alltså positivt definit och $(2,1)$ är därmed en lokal minimipunkt.

Svar: $(3,0)$ är en lokal minimipunkt, lokala maximipunkter saknas.

(2) Med stavar i z-led beskrivs området av $2x^2 + 2y^2 \leq z \leq 1 - 2x^2 - y^2$. Vi får och projektionen E på xy-planet ges av $4x^2 + 3y^2 \leq 1$. Vi får via linjärt byte $\{u = 2x,\ v = \sqrt{3} \cdot y\}$, som ger nytt område $F = \{u^2 + v^2 \leq 1\}$, följt av planpolärt variabelbyte:

$$\frac{d(x,y)}{d(u,v)} = 1 \Big/ \frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \frac{1}{2\sqrt{3}}, \quad \frac{d(u,v)}{d(\rho,\varphi)} = \rho.$$

$$\text{Volymen} = \iint_E (1 - 4x^2 - 3y^2)\,dx\,dy = \iint_F \frac{1}{2\sqrt{3}}(1 - u^2 - v^2)\,du\,dv =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (1-\rho^2)\rho\,d\rho \right) d\varphi = \frac{2\pi}{2\sqrt{3}} \left[\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{4\sqrt{3}}$$

Svar: Volymen $= \dfrac{\pi}{4\sqrt{3}}$.

---

(3) Ekvationen kan skrivas $F(x,y) = 2xy + \sin x + e^y = e$. $F(x,y)$ är en elementär funktion, alltså $F \in C^1$, och tydligen gäller $F(0,1) = e$. Eftersom $F'_x = 2y + \cos x$, $F'_x(0,1) = 3 \neq 0$, ger implicita funktionssatsen en lokalt definierad C^1-funktion $x = f(y)$ kring $(0,1)$. Också, $x(1) = 0$.

Impliciderivering: $2x(y)y + \sin x(y) + e^y = e$ ger

$2x'(y)y + 2x(y) + \cos x(y)\cdot x'(y) + e^y = 0$

i punkten $(0,1)$: $x(1) = 0 \Rightarrow 2x'(1) + x'(1) + e = 0$, $x'(1) = -\frac{e}{3}$

$\Rightarrow$ TANGENTEN: $x = x'(1)(y-1) + x(1) \Rightarrow x = -\frac{e}{3}(y-1)$, $y = 1 - \frac{3}{e}x$.

Ett annat alternativ: $\nabla F(0,1) = (3; e) \Rightarrow$ tangentens ekvation

$3(x-0) + e(y-1) = 0 \Rightarrow e(y-1) = -3x$, $y = 1 - \frac{3}{e}x$

Svar. $y = 1 - \frac{3}{e}x$.

---

(4) (a) Integration av första ekvationen m.a.p. x ger

$$f(x,y) = \int\left(\frac{y}{(x+y)^2} + y + 2\right)dx = -\frac{y}{x+y} + xy + 2x + h(y),$$

där $h(y) \in C^1$, som deriverat m.a.p. y och insatt i andra ekvationen ger

$$f'_y(x,y) = -\frac{(x+y)-y}{(x+y)^2} + x + h'(y) \overset{\text{enligt}}{=} -\frac{x}{(x+y)^2} + x - 3$$

$\Leftrightarrow$ $h'(y) = -3$, därmed $g(y) = -3y + C$, alltså blir

$f(x,y) = -\frac{y}{x+y} + xy + 2x - 3y + C$, där $f(1,1) = 0$ ger $C = \frac{1}{2}$.

b) En sådan C^2-funktion g måste uppfylla $g''_{xy} = g''_{yx}$,

alltså $g''_{xy} - g''_{yx} = 0$, men

$$g''_{xy} - g''_{yx} = (g'_x)'_y - (g'_y)'_x = \left(\frac{1}{(x+y)^2} - \frac{2y}{(x+y)^3} + 1\right) - \left(\frac{1}{(x+y)^2} - \frac{2x}{(x+y)^3} - 1\right) =$$

$$= 2 + \frac{2x-2y}{(x+y)^3},$$

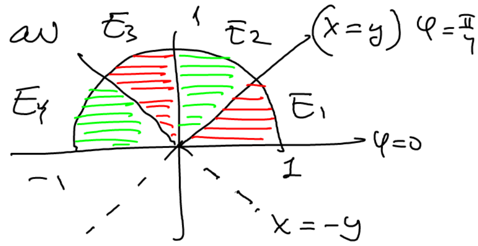
och t.ex. är $g''_{xy} - g''_{yx} = 2 \neq 0$ i $(1,1) \Rightarrow$ kan ingen sådan funktion $g(x,y)$ existera!

Svar: (a) $f(x,y) = -\frac{y}{x+y} + xy + 2x - 3y + \frac{1}{2}$

(b) enligt ovan

---

(5) • $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1,\ y \ge 0\}$ ges av



• Integranden

$$f(x,y) = |x(x^2-y^2)| = \begin{cases} x(x^2-y^2) & \text{i } E_1 \cup E_3 \text{ (rött)} \\ -x(x^2-y^2) & \text{i } E_2 \cup E_4 \text{ (grönt)} \end{cases}$$

$D = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4$

Detta ger

$$I = \iint_D |x^3 - xy^2|\,dxdy = \iint_{E_1 \cup E_3} x(x^2-y^2)\,dxdy - \iint_{E_2 \cup E_4} x(x^2-y^2)\,dxdy =: I_1 - I_2$$

Planpolär variabelbyte samt $x^2-y^2 = \rho^2(1-2\sin^2\varphi)$ ger

$$\iint_{E_1} x(x^2-y^2)\,dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^1 \rho^4 \cdot \cos\varphi(1-2\sin^2\varphi)\,d\rho\,d\varphi\right) = \frac{1}{5}\left[\sin\varphi - \frac{2}{3}\sin^3\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{15}$$

Analogt

$$\iint_{E_3} x(x^2-y^2)\,dxdy = \frac{1}{5}\left[\sin\varphi - \frac{2}{3}\sin^3\varphi\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} = \frac{1}{5}\left[\frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3}\right]$$

Alltså $\quad I_1 = \frac{\sqrt{2}}{15} + \frac{\sqrt{2}}{15} - \frac{1}{15} = \frac{2\sqrt{2}-1}{15}$

Det samma kalkyl ger : $I_2 = -\frac{2\sqrt{2}-1}{15}$, därmed

$$I = I_1 - I_2 = \frac{4\sqrt{2}-2}{15}$$

Svar $\quad \frac{4\sqrt{2}-2}{15}$

---

(6) a) till varje tal $\varepsilon > 0$ finns det ett tal $\delta > 0$ sådant att

$0 < \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \delta \Rightarrow |f(x,y) - A| < \varepsilon$.

b) Låt $f(x,y) = \frac{\ln(1+xy)}{x^2+y^2}$, så $f(x,x) = \frac{\ln(1+x^2)}{2x^2} \to \frac{1}{2}$ då $x \to 0$

(standart gränsvärde), men $f(x,-x) = \frac{\ln(1-x^2)}{2x^2} \to -\frac{1}{2}$ då $x \to 0$

alltså $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ $\underline{\underline{\text{saknas}}}$.

c) Låt $g(x,y,z) = \frac{\ln(1+xyz)}{x^2+y^2+z^2}$. Notera att : $\frac{\ln(1+t)}{t} \to 0$ då $t \to 0$

och $0 \le \left|\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}\right| \le \frac{\rho\cdot\rho\cdot\rho}{\rho^2} = \rho \to 0$, så $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2} = 0$

Alltså får vi

$$g(x,y,z) = \underbrace{\frac{\ln(1+xyz)}{xyz}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}}_{\to 0} \to 1\cdot 0 = 0 \quad \text{då } (x,y,z)\to(0,0,0)$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{\ln(1+xyz)}{xyz} = 0.$$

Svar. b) existerar ej c) 0.

7 Observera att $D = \{x \geq 0, y \geq 0\}$ är obegränsat ($\neq$ kompakt).

Längs strålen $x = 2y$, $y \geq 0$, gäller $f(x,y) = f(2y, y) = 6y - 4 \to \infty$ då $y \to \infty$, så största värde saknas.

Vidare, då $x \geq 0$ och $y \geq 0$ får vi

$$f(x,y) = \frac{3x-4}{(x-2y)^2+1} \overset{(1)}{\geq} \frac{-4}{(x-2y)^2+1} \overset{(2)}{\geq} \frac{-4}{0+1} = -4$$

och vi har likhet i (1) precis då $x = 0$, och
i (2) precis då $x - 2y = 0$,

d.v.s. $f(x,y) \geq -4$ med likhet då $(x,y) = (0,0)$.

$\Rightarrow$ -4 är minsta värde av f.

Svar f_{max} existerar ej.

$f_{min} = -4 = f(0,0)$.